МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
КИРОВОГРАДСКАЯ ЛЕТНАЯ АКАДЕМИЯ НАЦИОНАЛЬНОГО АВИАЦИОННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Зайцев Е. П.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению расчетно-графической работы по разделам: «Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление»

для курсантов направления 6.070103 «Обслуживание воздушных судов»

Кировоград

2015

УДК 517 (075)

Р е ц е н з е н т :

Колесниченко С. Ф. – кандидат технических наук, доцент кафедры «Авиационной техники».

Методичні вказівки щодо виконання РГР з «Теорії функцій комплексного змінного та операційному численню» призначені для курсантів напрямку 6.070103 «Обслуговування повітряних суден». У методичних вказівках наведені короткі теоретичні відомості, таблиця оригіналів і їх зображень, а також варіанти типових розрахунків.

Зайцев Е. П. Методические указания по выполнению расчетно-графической работы по разделам: «Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление» / Е. П. Зайцев. – Кировоград : КЛА НАУ, 2015. – 31 с.

Методические указания по выполнению РГР по «Теории функций комплексного переменного и операционному исчислению» предназначены для курсантов направления 6.070103 «Обслуживание воздушных судов». В методических указаних приведены кратки теоретические сведения, таблица оригиналов и их изображений, а также варианты типовых расчетов.

Рассмотрено и рекомендовано к публикации кафедрой физико-математических дисциплин, протокол №3 от 1 декабря 2014 года

Рассмотрено и рекомендовано к публикации кафедрой авиационной техники, протокол №3 от 29.10.14 года

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Современное бурное развитие науки и техники предъявляет высокие требования к математической подготовке специалиста в различных отраслях человеческих знаний. Если еще сравнительно недавно инженерная практика могла обходиться не очень сложными математическими расчетами, то в настоящее время для решения инженерных задач необходимы глубокие знания многих разделов высшей математики.

В учебной работе кафедр математики высших технических учебных заведений с каждым годом все большее значение приобретают различные специальные разделы высшей математики. Так, например, курсантам, обучающимся по специальности «Техническое обслуживание и ремонт воздушных судов и авиадвигателей», необходимо знать теорию функций комплексного переменного и операционное исчисление. Как известно, активная самостоятельная работа курсантов – залог успешного овладения изучаемым курсом. Одной из форм активизации учебного процесса по математике служит система типовых расчетов (ТР). Основой системы ТР является индивидуализация заданий, т. е. каждое расчетное задание, входящее в настоящее методическое указание, содержит 30 вариантов, что позволяет предложить каждому курсанту учебной группы индивидуальное задание. Помимо задач, каждый изучаемый раздел содержит краткие теоретические сведения, которые позволяют оптимизировать выполнение заданий.

Расчетные задания выполняются частями по мере продвижения в изучении курса. Теоретические вопросы прорабатываются по лекционному материалу и обсуждаются на практических занятиях. Решение каждой задачи выполняется в отдельной тетради, в которой на титульной обложке приклеивается лист из приложения А.

1 Теория функций комплексного переменного

Справочный материал

Комплексным числом z называется выражение вида $z = x + iy$ (алгебраическая форма комплексного числа), где $x = \mathrm{Re}\, z,\ y = \mathrm{Im}\, z \in R$ - действительная и мнимая части комплексного числа. Число i, квадрат которого равен (-1), называется *мнимой единицей*, т. е., $i^2 = -1$.

Комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются *равными* тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Действия над комплексными числами:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2); \tag{1}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1); \tag{2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \qquad x_2^2 + y_2^2 \neq 0. \tag{3}$$

$$i^{4k} = 1;\ i^{4k+1} = i;\ i^{4k+2} = -1;\ i^{4k+3} = -i,\ k \in N. \ (4)$$

Длина вектора $\overline{r}$ комплексного числа z, называется *модулем* этого числа и обозначается $|z|$ или r, т. е.

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5}$$

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\overline{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого комплексного числа и обозначается $\mathrm{Arg}\ z$. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определен неоднозначно: если φ – аргумент числа $z = x + iy$, то $\varphi + 2\pi k$ также аргумент числа z, $\forall k \in Z$.

Для однозначности определения аргумента его значения выбирают из промежутка $(-\pi, \pi\ ]$, обозначают $\arg\ z$ или φ $(-\pi < \arg z \le \pi\ )$ и называют *главным значением аргумента*

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & \text{если} \quad x > 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & \text{если} \quad x < 0,\ y \ge 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & \text{если} \quad x < 0,\ y < 0, \\ \pi/2, & \text{если} \quad x = 0,\ y > 0, \\ -\pi/2, & \text{если} \quad x = 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Любое комплексное число $z = x + iy\ (z \ne 0)$ можно представить в тригонометрической форме

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7}$$

Используя формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi\,. \tag{8}$$

комплексное число можно записать также в показательной форме

$$z = re^{i\varphi}, \text{где } r = |z|,\ \varphi = \arg z. \tag{9}$$

При возведении комплексного числа в степень модуль возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени (*формула Муавра*):

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \tag{10}$$

Корень степени n из комплексного числа z имеет *n* различных значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{11}$$

где $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$.

Значения *показательной функции* комплексного переменного $z = x + iy$ вычисляются по формуле

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{12}$$

причем эта функция периодическая с основным периодом $2\pi i$.

Тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ выражаются через показательную:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \text{ а } \mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \tag{13}$$

Функции $w = \sin z$ и $w = \cos z$ – периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули

$$z = \pi k \text{ и } z = \pi/2 + \pi k, \; k \in Z.$$

Для тригонометрических функций комплексного переменного остаются в силе все известные формулы тригонометрии.

Гиперболические функции определяются равенствами:

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \; \mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \; \mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \; \mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}. \tag{14}$$

Тригонометрические и гиперболические функции связаны между собой следующими соотношениями:

$$\sin z = -i\,\mathrm{sh}\, iz, \; \cos z = \mathrm{ch}\, iz, \; \mathrm{tg} z = -i\,\mathrm{th}\, iz, \; \mathrm{ctg} z = i\,\mathrm{cth}\, iz, \tag{15}$$

$$\mathrm{sh}\, z = -i \sin iz, \; \mathrm{ch}\, z = \cos iz, \; \mathrm{th} z = -i\,\mathrm{tg}\, iz, \; \mathrm{cth}\, z = i\,\mathrm{ctg}\, iz, \tag{16}$$

Логарифмическая функция $\mathrm{Ln}\, z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причем

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k i), \; k \in Z. \tag{17}$$

Значение функции, которое получается при $k = 0$, называется главным значением и обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \tag{18}$$

Обратные тригонометрические функции

$$\mathrm{Arc}\sin z, \mathrm{Arc}\cos z, \quad \mathrm{Arctg}\, z, \; \mathrm{Arcctg}\, z$$

определяются как функции, обратные соответственно к функциям $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{tg} z$, $\mathrm{ctg} z$. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмическую функцию:

$$\operatorname{Arc}\sin z = -i\operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right),\ \operatorname{Arc}\cos z = -i\operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right). \quad (19)$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}. \quad (20)$$

Главные значения обратных тригонометрических функций $\arcsin z,$ $\arccos z,$ $\operatorname{arctg} z,$ $\operatorname{arcctg} z$ получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

Общая степенная функция $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta -$ любое комплексное число, определяется равенством

$$z^a = e^{a\operatorname{Ln} z}. \quad (21)$$

Эта функция многозначная; ее главное значение равно

$$z^a = e^{a\ln z}. \quad (22)$$

Общая показательная функция $w = a^z$, $z \in C$ определяется равенством

$$a^z = e^{z\operatorname{Ln} a}. \quad (23)$$

Главное значение этой многозначной функции $a^z = e^{z\ln a}$.

Пусть функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ определена в некоторой области D комплексного переменного $z = x + iy$. В каждой точке дифференцируемости этой функции выполняются соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (24)$$

называемые *условиями Коши-Римана*.

Функция $w = f(z)$ называется *аналитической в данной точке* $z \in D$, если она дифференцируема как в самой точке z, так и в некоторой ее окрестности.

Функция $w = f(z)$ называется *аналитической в области* D, если она дифференцируема в каждой точке этой области. Для любой аналитической функции $w = f(z)$ имеем

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (25)$$

Функция называется *гармонической в области* D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0. \qquad (26)$$

Если функция $f(z)=u+iv$ аналитическая в некоторой области D, то ее действительная часть $u(x,y)$ и мнимая часть $v(x,y)$ являются гармоническими в этой области функциями.

Две гармонические функции, удовлетворяющие условиям Коши-Римана (24), называют *сопряженной парой гармонических функций*.

Задание 1 По комплексному числу $z=x+iy$, в котором x и y получены из решения соответствующего уравнения, записать число z в тригонометрической и показательной формах и найти z^{k+5}, $\sqrt[4]{z}$ и $\mathrm{Ln}\, z$ где $k-$ порядковый номер в академическом журнале.

1) $(2-i)/(x-3yi)=2+i$. 2) $(3x-iy+2-ix)/(y-4+3i)=1-3i$.

3) $(5xi+y)/(x-iy-2-3i)=-3+i$. 4) $4yi/(x+2y-1+i3)=4-i$.

5) $(x-2yi)/(3+4x+2yi)=2-i$. 6) $(y+3xi)/(1+2x-3yi-i5)=i$. 7) $-2xi/(1-i+x-2iy)=3+2i$. 8) $(1+i+3yi)/(1-i+x-yi)=3i-1$.

9) $(6x-i+y)/(3+yi-2i)=3i$. 10) $-4xi/(1-2i-x+3yi)=2i-3$.

11) $(-7+xi)/(x-2yi+3i)=i+1$. 12) $-2yi/(xi-y+1+i)=2-3i$.

13) $(6x+3iy)/(yi-x+2i)=i+3$. 14) $(5-3xi-i+y)/(1+2yi-x)=1$.

15) $2xi/(yi+2x-1-i)=2-i.$ 16) $(2i-y)/(1+3xi+y+2i)=2i-1$.

17) $5xi/(1+7i+x-3yi)=4i+1$. 18) $4yi/(1-3xi+2y)=1-2i.$

19) $2xi/(1-7i+yi-5x)=3-i.$ 20) $(1+3xi+y)/(1-yi+x)=1-2i.$

21) $-4yi/(3x+xi+y-i)=4-i.$ 22) $(3+xi-4y)/(3-yi+2x)=i-1$.

23) $(5y+2xi)/(y-xi+2i-1)=5-2i.$ 24) $2xi/(3yi-x+i)=2+3i.$

25) $(6x-i+3)/(2y-5xi)=1+i.$ 26) $(4+3i)/(8xi-3y+i)=5-2i.$

27) $3xi/(2yi+x-i)=2-3i.$ 28) $(2-i)/(-x+2i+yi)=3-2i.$

29) $(5x-3yi+4)/(3xi-y+i)=2+i.$ 30) $2xi/(x-3yi-1+i)=4+i.$

Решение типового варианта

○ Найдем действительные решения x и y уравнения

$$\frac{2x-1+3i-2yi}{3y+4xi}=1-i$$

и по ним составим комплексное число $z=x+iy$. Для этого умножим обе части уравнения на $3y+4xi\neq 0$ и выделим действительную и мнимую части:

$$2x-1+i(3-2y)=(3y+4xi)(1-i),$$

$$2x-1+i(3-2y)=(3y+4x)+(4x-3y)i,$$

$$\begin{cases}3y+4x=2x-1,\\4x-3y=3-2y,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y=-1,\\4x-y=3.\end{cases}\quad\Delta=\begin{vmatrix}2&3\\4&-1\end{vmatrix}=-14,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}-1&3\\3&-1\end{vmatrix}=-8,\quad\Delta_y=\begin{vmatrix}2&-1\\4&3\end{vmatrix}=10,\ x=\frac{4}{7},\quad y=-\frac{5}{7}.$$

$$z=\frac{4}{7}-i\frac{5}{7}.$$

Представим это комплексное число в тригонометрической и показательной формах:

$$r = \sqrt{16/49 + 25/49} = \sqrt{41}/7\,, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(-5/4) = -\operatorname{arctg}(5/4).$$

Используя формулы (7) и (9), получим:

$$z = \frac{\sqrt{41}}{7}\Big(\cos\big(-\operatorname{arctg}(5/4)\big) + i\sin\big(-\operatorname{arctg}(5/4)\big)\Big) =$$

$$= \frac{\sqrt{41}}{7}\Big(\cos\big(\operatorname{arctg}(5/4)\big) - i\sin\big(\operatorname{arctg}(5/4)\big)\Big),$$

$$z = \frac{\sqrt{41}}{7}e^{-i\operatorname{arctg}(5/4)}.$$

Используя формулы (10) и (11), получим:

$$z^5 = \frac{\sqrt{41^5}}{7^5}\Big(\cos\big(5\operatorname{arctg}(5/4)\big) - i\sin\big(5\operatorname{arctg}(5/4)\big)\Big),$$

$$\sqrt[4]{z} = \frac{\sqrt[8]{41}}{\sqrt[4]{7}}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}(5/4 + 2\pi k}{4} - i\sin\frac{\operatorname{arctg}(5/4 + 2\pi k}{4}\right),\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Применяя формулу (17), получим

$$\operatorname{Ln} z = \ln(\sqrt{41}/7) - i\operatorname{arctg}(5/4) + 2\pi k i,\ \ k \in Z. \bullet$$

Задание 2 Представить комплексные числа в алгебраической форме.

1. а) $\sin(\pi/4 + 2i)$; б) $\operatorname{Ln} 6$; в) $\operatorname{Arccos} i$.
2. а) $\operatorname{sh}(\pi i/4 + 2)$; б) $\operatorname{Ln}(1+i)$; в) $\operatorname{Arcsin} i$.
3. а) $\cos(\pi/6 + 2i)$; б) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i)$; в) $\operatorname{Arctg} i$.
4. а) $\operatorname{ch}(\pi i/4 + 2)$; б) $\operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i)$; в) $\operatorname{Arcctg} i$.
5. а) $\sin(\pi/3 + i)$; б) $\operatorname{Ln}(-1 - i)$; в) $\operatorname{Arccos}(1+i)$.
6. а) $\cos(\pi/4 + i)$; б) $\operatorname{Ln}(1 - i)$; в) $\operatorname{Arcsin}(1+i)$.

7. а) $\mathrm{sh}(\pi i/2+1)$; б) 1^{2i}; в) $\mathrm{Arctg}(1-2i)$.

8. а) $\mathrm{ch}(1-\pi\mathrm{i})$; б) i^{3i}; в) $\mathrm{Arcctg}(1-i)$.

9. а) $\cos(\pi/4-2i)$; б) $(-1)^{4i}$; в) $\mathrm{Arc}\sin\,(-i)$.

10. а) $\mathrm{sh}(\pi i/3+1)$; б) $(-i)^{5i}$; в) $\mathrm{Arc}\cos\,(-i)$.

11. а) $\mathrm{ch}(\pi i/4+2)$; б) i^{i}; в) $\mathrm{Arc}\sin 4$.

12. а) $\sin(\pi/6-3i)$; б) $(-1)^{\sqrt{2}}$; в) $\mathrm{Arc}\sin(-2)$.

13. а) $\cos(\pi/3+3i)$; б) $(1+i)^{i}$; в) $\mathrm{Arc}\sin(\pi i/3)$.

14. а) $\mathrm{sh}(1-\pi i/3)$; б) $(\sqrt{3}+i)^{1+i}$; в) $\mathrm{Arctg}(1+i)$.

15. а) $\mathrm{ch}(2-\pi i/6)$; б) $(1-i)^{3-3i}$; в) $\mathrm{Arc}\cos\,(-2i)$.

16. а) $\sin(\pi/3-2i)$; б) $(-12+5i)^{i}$; в) $\mathrm{Arctg}(1+2i)$.

17. а) $\cos(\pi/6-i)$; б) $(-1-i)^{4i}$; в) $\mathrm{Arc}\sin(1-i)$.

18. а) $\mathrm{sh}(2-\pi i)$; б) $(4-3i)^{i}$; в) $\mathrm{Arc}\cos(2+i)$.

19. а) $\sin(\pi/2-5i)$; б) $(2-i)^{2i}$; в) $\mathrm{Arctg}(2+3i)$.

20. а) $\mathrm{ch}(3+\pi i/4)$; б) $(4-i)^{1+i}$; в) $\mathrm{Arcctg}(4-i)$.

21. а) $\cos(\pi/2+4i)$; б) $(1-2i)^{3i}$; в) $\mathrm{Arc}\sin(-4)$.

22. а) $\mathrm{sh}(1+\pi i/2)$; б) $(2+3i)^{i+1}$; в) $\mathrm{Arc}\cos(-5)$.

23. а) $\sin(\pi/4-5i)$; б) $(-1)^{i\sqrt{2}}$; в) $\mathrm{Arctg}(-5i)$.

24. а) $\cos(\pi/6-4i)$; б) $\mathrm{Ln}\,(\sqrt{2}-i)$; в) $\mathrm{Arcctg}(-3i)$.

25. а) $\mathrm{sh}(2-3\pi i/2)$; б) $(-i)^{i\sqrt{2}}$; в) $\mathrm{Arc}\sin(-4i)$.

26. а) $\mathrm{ch}(4-3\pi i/4)$; б) $(3-2i)^{1-i}$; в) $\mathrm{Arc}\cos(5-i)$.

27. а) $\sin(3\pi/4-3i)$; б) $(-i)^{i}$; в) $\mathrm{Arctg}(2-5i)$.

28. а) $\cos(2\pi/3-4i)$; б) $(-1+i\sqrt{3})^{-3i}$; в) $\mathrm{Arcctg}(2+i)$.

29. а) $\mathrm{ch}(4-3\pi i/2)$; б) $(2i+1)^{-i}$; в) $\mathrm{Arc}\sin(\pi i/4)$.

30. а) $\mathrm{sh}(1-\pi i/6)$; б) $(-i)^{i-1}$; в) $\mathrm{Arctg}(\pi i/4)$.

Решение типового варианта

Представить комплексные числа в алгебраической форме.

○ а) $$\cos(\pi + i\ln 2) = \cos\pi\cdot\mathrm{ch}\ln 2 - i\sin\pi\cdot\mathrm{sh}\ln 2 = |14| =$$

$$= -1\cdot(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2})/2 = -(2+1/2)/2 = -5/4.$$

б) $i^{1/i} = |17;\ 21| = e^{i^{-1}\mathrm{Ln}\, i} = e^{i^{-1}(\ln 1+\pi i/2+2k\pi i)} = e^{(1/2+2k)\pi}$.

в) $$\mathrm{Arctg}\,(1+i) = |20| = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i}{2-i} = |3;6| =$$

$$= -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)} = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right) = |17| =$$

$$= -\frac{i}{2}\left(-\ln\sqrt{5} + i(\mathrm{arctg}\,(-2)+\pi) + 2k\pi i\right) = \frac{i\ln\sqrt{5}}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\mathrm{arctg}\ 2+\pi\right)+k\pi = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\ 2 + (2k+1)\frac{\pi}{2} + \frac{i\ln\sqrt{5}}{2},\ k\in Z \ \bullet$$

Задание 3 Восстановить двумя способами аналитическую функцию $w = f(z)$ по известной ее действительной $u(x,y)$ или мнимой $v(x,y)$ части и при дополнительном условии $f(z_0)$. Проверить гармоничность данной и полученной функций.

1) $u = x^2 - y^2 + x,\ f(0) = 0.$ 2) $u = x^3 - 3xy + 1,\ f(0) = 0.$

3) $u = 2xy + x,\ f(0) = 0.$ 4) $u = x^2 - y^2 - 2y,\ f(0) = 0.$

5) $u = (e^{2x}+1)\cos y/e^x,\ f(0) = 2.$ 6) $u = x/(x^2+y^2),\ f(1) = 1+i.$

7) $v = e^{-y}\sin x + y,\ f(0) = 1.$ 8) $v = e^{-y}\cos x,\ f(0) = 1.$

9) $v = e^x\cos y,\ f(0) = 1+i.$ 10) $u = y - 2xy,\ f(0) = 0.$

11) $v = -\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2},\ f(0) = 1.$ 12) $u = y - \dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(1) = 2.$

13) $v = x^2 - y^2 + 2x + 1,\ f(0) = i.$ 14) $v = y + 2xy,\ f(0) = 0.$

15) $v = x^2 - y^2 - 2x + 1,\ f(0) = 1.$ 16) $v = 3x^2 y - y^3,\ f(0) = 1.$

17) $v = 3x^2 y - y^3 - y,\ f(0) = 0.$ 18) $v = 2x + 2xy,\ f(0) = 0.$

19) $v = 1 - e^x \sin y,\ f(0) = 1 + i.$ 20) $v = e^{-y} \sin x,\ f(0) = 1.$

21) $u = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y,\ f(0) = 2.$ 22) $v = e^{-y} \sin x,\ f(0) = 1.$

23) $v = 1 - \dfrac{y}{x^2 + y^2},\ f(1) = 1 + i.$ 24) $v = x^2 - y^2 - x,\ f(0) = 0.$

24) $u = e^{-y} \cos x + x,\ f(0) = 1.$ 25) $v = e^{-y} \sin x,\ f(0) = 1.$

25) $u = \dfrac{x+1}{(x+1)^2 + y^2},\ f(0) = 1.$ 26) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + x,\ f(1) = 2.$

27) $u = x^3 - 3xy^2 - x,\ f(0) = 0.$ 28) $u = -2xy - 2y,\ f(0) = i.$

29) $v = 2xy - 2y,\ f(0) = 1.$ 30) $v = 2xy + x,\ f(0) = 0.$

Решение типового варианта

Пусть известна действительная часть $u(x, y) = 2e^x \cos y$ аналитической функции $w = f(z)$ и дополнительное условие $f(0) = 2$. Найти $v(x, y)$ и проверить гармоничность u и v.

○ *Первый способ*. Найдем частную производную функции $u(x, y) = 2e^x \cos y$ по x. Имеем $\partial u / \partial x = 2e^x \cos y.$ Используя первое из условий Коши-Римана, получим $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y.$

Отсюда $v(x, y) = \int 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y + \varphi(x),$ где функция $\varphi(x)$ пока неизвестна. Дифференцируя $v(x, y)$ по x и используя второе из условий Коши-Римана, получим

$\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\dfrac{\partial u}{\partial y},$ откуда $\varphi'(x) = 0,$ а, следовательно,

$\varphi(x) = C,$ где $C = \text{const}$. Таким образом, $v(x, y) = 2e^x \sin y + C,$

и, следовательно, $f(z) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C) = 2e^z + iC.$ Постоянную C найдем из условия $f(0) = 2$, т. е. $2e^0 + iC = 2;$ Отсюда $C = 0$. Ответ: $f(z) = 2e^z$.

Второй способ. Кроме условий Коши-Римана, аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$ можно восстановить по одной из следующих формул:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \overline{z}_0}{2},\ \frac{z - \overline{z}_0}{2i}\right) - \overline{C}_0, \tag{27}$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z + \overline{z}_0}{2},\ \frac{z - \overline{z}_0}{2i}\right) + \overline{C}_0, \tag{28}$$

где $\overline{C}_0$ – сопряженное число для $C_0 = f(z_0)$, а $\overline{z}_0$ – сопряженное число для z_0. Воспользуемся формулой (27). В нашем примере $u(x, y) = 2e^x \cos y,\ z_0 = 0,\ C_0 = 2.$ Значит по этой формуле будем иметь $f(z) = 2 \cdot 2e^{z/2} \cos\left(z/2i\right) - 2$. Пользуясь тем, что $\cos(z/2i) = \cos(-zi/2) = \mathrm{ch}(z/2)$, получим окончательно

$$f(z) = 2 \cdot 2e^{z/2} \cos\left(z/2i\right) - 2 = 2 \cdot 2e^{z/2}\, \mathrm{ch}\left(z/2\right) - 2 =$$

$$= 2e^{z/2}\left(e^{z/2} + e^{-z/2}\right) - 2 = 2e^z.$$

В данном случае, используя (26), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^x \cos y, \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^x \sin y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2e^x \sin y,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -2e^x \sin y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \bullet$$

2 Операционное исчисление

Таблица 2.1.Оригиналы и их изображения

№	Оригинал	Изображения
1	1	$1/s,\ s>0$
2	e^{at}	$1/(s-a),\ s>0$
3	$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2),\ s>0$
4	$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2),\ s>0$
5	$\mathrm{sh}(at)$	$a/(s^2-a^2),\ s>\lvert a\rvert$
6	$\mathrm{ch}(at)$	$s/(s^2-a^2),\ s>\lvert a\rvert$
7	$e^{at}\sin(bt)$	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
8	$e^{at}\cos(bt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
9	$t^n,\quad n\in N$	$n!/s^{n+1},\quad s>0$
10	$t^n e^{at},\quad n\in N$	$n!/(s-a)^{n+1}$

Продолжение таблицы 2.1		
11	$\eta(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}, \quad s>0$
12	$\eta(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
13	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$ Теорема смещения
14	$f(t)*g(t)$	$F(s)G(s)$ Теорема Бореля
15	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$ Диф.-е оригиналов
16	$f(at)$	$F(s/a)/a, \quad a>0$ Теорема подобия
17	$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{1}{s}F(s)$ Инт.-е оригиналов

Продолжение таблицы 2.1

18	$erf\left(\frac{t}{2a}\right)$	$\frac{e^{a^2 s^2}}{s} erfc(as)$
19	$erfc\left(a/2\sqrt{t}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$
20	$J_0(at)$	$\left(s^2+a^2\right)^{-1/2}$
21	$I_0(at)$	$\left(s^2-a^2\right)^{-1/2}$
22	$\delta(t-a)$	e^{-sa}
23	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)$	$\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}, \quad a \geq 0$
24	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - ae^{a^2 t} erfc\left(a\sqrt{t}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{s}+a}$
25	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_s^\infty F(q)\,dq$ Инт-е из-й

Окончание таблицы 2.1

26	$f(t)=f(t+T)$, T-період	$\int\limits_0^T f(t)e^{-st}dt \Big/ \left(1-e^{-sT}\right)$ Изображение периодического оригинала
27	$f(t-a),\ t>0$ $0,\quad t<a$	$e^{as}F(s)$ Теорема запаздывания
28	$f(t+a),\ a>0$	$e^{sa}\left(F(s)-\int\limits_0^a f(t)e^{-st}dt\right)$ Теорема опережения
29	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$ Дифференцирование изображения
30	$\frac{d}{dt}\left(f(t)*g(t)\right)$	$pF_1(p)F_2(p)$ Интеграл Дюамеля

В таблице используются такие обозначения:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$ -

свертка оригиналов; $\frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-u^2}du=erf(x)$ - функция ошибок Гаусса; $erfc(x)=1-erf(x)$.

Задание 4 Найти изображение функции.

1) $f(t)=t^2\cdot e^{2t}+t+\sin 2t+5\cos 3t+\int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau.$

2) $f(t)=3t^2-4\mathrm{ch}2t+5\mathrm{sh}7t+\int_0^t \cos(t-\tau)e^{2\tau}d\tau.$

3) $f(t)=e^t\sin 2t+e^t\cos 2t+5e^{3t}+\int_0^t (t-\tau)^2\mathrm{ch}\,\tau d\tau.$

4) $f(t)=3t^2-4\mathrm{ch}2t+7\mathrm{sh}3t+(1-\cos t)/t.$

5) $f(t)=e^t\sin 2t+e^{-t}\cos 2t-3e^{2t}+(\cos t-\cos 2t)/t.$

6) $f(t)=\cos 5t+\sin 4t-te^{-2t}+(e^t-1-t)/t.$

7) $f(t)=e^t\sin 2t+e^t\cos 2t+5e^{3t}+(e^t-e^{-t})/t.$

8) $f(t)=3t^2-4\mathrm{ch}2t+7\mathrm{sh}3t-\int_0^t \sin\tau d\tau.$

9) $f(t)=e^t\sin 2t+e^{-t}\cos 2t-3e^{2t}-\int_0^t (\tau+1)\cos w\tau\, d\tau.$

10) $f(t)=\cos 5t+\sin 4t-te^{-2t}-\int\limits_0^t(\tau+1)\sin w\tau\, d\tau.$

11) $f(t)=3t^2+2te^{3t}-4\mathrm{ch}2t-\int\limits_0^t\tau\,\mathrm{sh}\,2\tau\, d\tau.$

12) $f(t)=e^{-4t}\cdot\sin 3t+2\sin 6t+t^2e^{3t}-\int\limits_0^t\tau\mathrm{ch}\,3\tau\, d\tau.$

13) $f(t)=e^t\sin 2t+e^t\cos 2t+5e^{3t}-\int\limits_0^t\sin^2 w\tau d\tau.$

14) $f(t)=3t^2-4\mathrm{ch}2t+7\mathrm{sh}3t-\int\limits_0^t\cos^2 w\tau d\tau.$

15) $f(t)=e^t\sin 2t+e^{-t}\cos 2t-3e^{2t}-\int\limits_0^t\cos\tau d\tau.$

16) $f(t)=\cos 5t+\sin 4t-te^{-2t}-\int\limits_0^t\sin w\tau d\tau.$

17) $f(t)=3t^2+2te^{3t}-4\mathrm{ch}2t-\int\limits_0^t\cos w\tau d\tau.$

18) $f(t)=t^2\cdot e^{2t}+t+\sin 2t+5\cos 3t-\int\limits_0^t\mathrm{sh}\, w\tau d\tau.$

19) $f(t)=3+t/2-e^{-3t}+e^tt^2+\int\limits_0^t\mathrm{ch}\, w\tau d\tau.$

20) $f(t)=3t^2-4\mathrm{ch}2t+5\mathrm{sh}7t+\int\limits_0^t\tau^2e^{-\tau}d\tau.$

21) $f(t)=3t^2+2te^{3t}-4\mathrm{ch}2t+\sin^2 2t.$

22) $f(t)=e^t\sin 2t+e^{-t}\cos 2t-3e^{2t}+\cos^2 3t.$

23) $f(t)=e^{t}\sin 2t+e^{t}\cos 2t+5e^{3t}-\cos^{3}3t.$

24) $f(t)=7te^{2t}-\cos 2t+3\sin t-\cos^{4}3t.$

25) $f(t)=e^{-4t}\cdot\sin 3t+2\sin 6t+t^{t}e^{3t}-\sin^{3}2t.$

26) $f(t)=t^{2}\cdot e^{2t}+t+\sin 2t+5\cos 3t+\sin^{4}2t.$

27) $f(t)=e^{-4t}\cdot\sin 3t+2\sin 6t+t^{2}e^{3t}-t\sin wt.$

28) $f(t)=3t^{2}-4\mathrm{ch}3t+7\mathrm{sh}3t-t\cos wt+\int\limits_{0}^{t}\tau^{2}e^{2(\tau-t)}d\tau.$

29) $f(t)=e^{t}\sin 2t+e^{-t}\cos 2t-3e^{3t}+\sin mt\cdot\sin nt.$

30) $f(t)=e^{2t}\cos 5t+e^{2t}\sin 4t-t^{2}e^{-2t}-\sin mt\cdot\cos nt.$

Решение типового варианта

Найти изображение функции по заданному оригиналу

$$f(t)=t^{2}e^{t}+\sin t/t-e^{-t}\cos 2t+\int\limits_{0}^{t}e^{\tau}d\tau-\int\limits_{0}^{t}(t-\tau)e^{\tau}d\tau.$$

○ Используя таблицу оригиналов и их изображений для: первого выражения 2 и 29; второго-3 и 25; третьего-4 и 13; четвертого-2 и 17; пятого- 14 для свертки функций

$f(t)=t$ и $g(t)=e^{t}$, получим

$$F(p)=\left(\frac{1}{p-1}\right)''+\int\limits_{p}^{\infty}\frac{dp}{p^{2}+1}-\frac{p+1}{(p+1)^{2}+4}+\frac{1/(p-1)}{p}-\frac{1}{p^{2}(p-1)},$$

$$\left(\frac{1}{p-1}\right)''=\left(-\frac{1}{(p-1)^{2}}\right)'=\frac{2}{(p-1)^{3}},$$

$$\int\limits_{p}^{\infty}\frac{ds}{s^{2}+1}=\operatorname{arctg}s\Big|_{p}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}p=\operatorname{arcctg}p.$$

$$F(p)=\frac{2}{(p-1)^{3}}+\operatorname{arcctg}p-\frac{p+1}{(p+1)^{2}+4}+\frac{1}{p(p-1)}-\frac{1}{p^{2}(p-1)}.\ \bullet$$

Задание 5 Найти оригинал по заданному изображению

1) $\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.

2) $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+p+1)}$.

3) $\dfrac{2p}{(p^2+4p+8)^2}$.

4) $\dfrac{1}{p(p^2+1)^2}$.

5) $\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.

6) $\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

7) $\dfrac{6}{p^3-8}$.

8) $\dfrac{4}{p^3+8}$.

9) $\dfrac{1}{p^5+p^3}$.

10) $\dfrac{p+4}{p^2+4p+5}$.

11) $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

12) $\dfrac{p+5}{(p+1)(p^2-2p+5)}$.

13) $\dfrac{1}{p^3+p^2+p}$.

14) $\dfrac{3p+2}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

15) $\dfrac{1}{p(p^3+1)}$.

16) $\dfrac{1}{p^3(p^2-4)}$.

17) $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-2)}$.

18) $\dfrac{1}{p^3-1}$.

19) $\dfrac{e^{-p/2}}{(p^2+1)(p^2+2)}$.

20) $\dfrac{5}{(p-1)(p^2+4p+5)}$.

21) $\dfrac{5p}{(p+2)(p^2-2p+2)}$.

22) $\dfrac{1}{(p-2)(p^2+2p+3)}$.

23) $\dfrac{p}{(p^2+4p+8)^2}$.

24) $\dfrac{1-p}{p(p^2+3p+3)}$.

25) $\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$.

26) $\dfrac{2-3p}{(p-2)(p^2-4p+5)}$.

27) $\dfrac{2p+3}{(p-1)(p^2-p+1)}$. 28) $\dfrac{2-p}{p^3-2p^2+5p}$.

29) $\dfrac{2}{(p+1)(p^2+2p+2)}$. 30) $\dfrac{2-p}{(p-1)(p^2-4p+5)}$.

Решение типового варианта

Найти оригинал по заданному изображению

$$F(p)=\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}.$$

○ Разлагаем заданную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}. \qquad (1)$$

Приводим правую часть равенства к общему знаменателю и приравниваем числители левой и правой частей:

$$1=A(p-1)(p^2+4)+Bp(p^2+4)+(Cp+D)p(p-1).$$

В начале применим способ частных значений и подставим в последнее равенство корни знаменателя:

$$p=0:\quad 1=A(-1)4 \quad\Rightarrow\quad A=-1/4;$$

$$p=1:\quad 1=B\cdot 1\cdot 5 \quad\Rightarrow\quad B=1/5.$$

Подставляя A и B в последнее равенство, составим систему для определения остальных неопределенных коэффициентов:

$$1+(p-1)(p^2+4)/4-p(p^2+4)/5=(Cp+D)p(p-1),$$

$$1+(p^3-p^2+4p-4)/4-(p^3+4p)/5=Cp^3+Dp^2-Cp^2-Dp,$$

$$p^3/20-p^2/4+p/5=Cp^3+(D-C)p^2-Dp \Rightarrow C=1/20,\ D=-1/5.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (1), получим

$$F(p)=-\frac{1}{4}\frac{1}{p}+\frac{1}{5}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{20}\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{5}\frac{1}{p^2+4}.$$

Используя свойство линейности и таблицу оригиналов и их изображений 2.1, находим

$$f(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}\right]=-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}e^t+\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{1}{10}\sin 2t. \bullet$$

Задание 6 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условиям $y(0)=0,\ y'(0)=0$ с помощью интеграла Дюамеля.

1) $y''-y=\operatorname{th} t.$

2) $y''-y'=1\big/(e^t+1).$

3) $y''-y=\operatorname{th}^2 t.$

4) $y''-y=1\big/\operatorname{ch} t.$

5) $y''-y'=e^t\big/(1+e^t).$

6) $y''-2y'+y=e^t\big/(t+1).$

7) $y''+y'=e^{2t}\big/(3+e^t).$

8) $y''-2y'=e^t\big/\operatorname{ch} t.$

9) $y''-y=1\big/(1+\operatorname{ch} t).$

10) $y''+y'=1\big/(e^t+1).$

11) $y''-4y'+4y=2e^{2t}\big/\operatorname{ch}^2 2t.$

12) $y''-4y=1\big/\operatorname{ch}^3 2t.$

13) $y''-y=1\big/\operatorname{ch}^2 t.$

14) $y''+y'=e^t\big/(e^t+1).$

15) $y''+2y'+y=e^{-t}\big/(1+t)^2.$

16) $2y''-y'=e^t\big/(e^{t/2}+1)^2.$

17) $y''-y=1\big/\operatorname{ch}^3 t.$

18) $y''-y'=e^{2t}\big/(e^t+1)^2.$

19) $y''+2y'+y=te^{-t}\big/(1+t).$

20) $y''-y'=e^{2t}\big/(e^t+2).$

21) $y''-y=\operatorname{sh} t\big/\operatorname{ch}^2 t.$

22) $y''+y'=e^t\big/(e^t+1)^2.$

23) $y''+2y'+y=e^{-t}\big/(1+t^2).$

24) $y''-2y'+y=e^t\big/\operatorname{ch}^2 t.$

25) $y''+2y'+y=e^{-t}\big/\operatorname{ch}^2 t.$

26) $y''-4y=\operatorname{th}^2 2t.$

27) $y''+2y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}.$

28) $y''+y'=\dfrac{1}{(e^t+1)^2}.$

29) $y''-2y'+y=e^t\big/(1+t^2).$

30) $y''-2y'+2y=2e^t\cos t.$

Решение типового варианта

Найти решение задачи Коши с помощью интеграла Дюамеля:

$$y''+4y'+4y=e^{-2t}\big/(1+2t)^2.$$

○ Решим сначала вспомогательную задачу

$$z''+4z'+4z=1,\quad z(0)=z'(0)=0.$$

Пусть $L[z(t)] = Z(p)$. Перейдя в этом уравнении к изображению, получим

$$(p^2 + 4p + 4)Z(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow Z(p) = \frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2},$$

$$1 = A(p+2)^2 + Bp(p+2) + Cp.$$

$$p = 0: \quad 1 = A \cdot 4 \Rightarrow A = 1/4. \;\; p = -2: \quad 1 = C \cdot (-2) \Rightarrow C = -1/2.$$

$$p = 1: \quad 1 = 9/4 + B \cdot 3 - 1/2 \Rightarrow B = -1/4.$$

$$Z(p) = \frac{1}{p(p+2)^2} = \frac{1}{4p} - \frac{1}{4(p+2)} - \frac{1}{2(p+2)^2}.$$

Отсюда $L^{-1}[Z(p)] = 1/4 - e^{-2t}/4 - te^{-2t}/2$. По формуле Дюамеля искомое решение имеет вид:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau) z'(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4} - \frac{e^{-2(t-\tau)}}{4} - \frac{(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}}{2}\right) d\tau.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4} - \frac{e^{-2(t-\tau)}}{4} - \frac{(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}}{2}\right) =$$

$$= -\frac{e^{-2(t-\tau)}(-2)}{4} - \frac{e^{-2(t-\tau)}}{2} - \frac{(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}(-2)}{2} = (t-\tau)e^{-2(t-\tau)}.$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{e^{-2\tau}}{(1+2\tau)^2} (t-\tau)e^{-2(t-\tau)} = e^{-2t} \int_0^t \frac{(t-\tau)}{(1+2\tau)^2} d\tau =$$

$$= e^{-2t}\left(t\int_0^t \frac{d\tau}{(1+2\tau)^2} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{(1+2\tau-1)d\tau}{(1+2\tau)^2}\right) =$$

$$= e^{-2t}\left(t\int_0^t \frac{d\tau}{(1+2\tau)^2} - \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{d\tau}{(1+2\tau)} - \int_0^t \frac{d\tau}{(1+2\tau)^2}\right)\right) =$$

$$= e^{-2t}\left(-\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{1+2t} + \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln(1+2t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2t} - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= e^{-2t}\left(-\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{1+2t}+\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+2t)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+2t}+\frac{1}{4}\right)=$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{-2t-1}{4(1+2t)}+\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+2t)+\frac{1}{4}\right)= e^{-2t}\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\ln(1+2t)\right)=$$

$$=\frac{e^{-2t}}{4}\left(2t-\ln(1+2t)\right). \bullet$$

Задание 7 Операционным методом решить задачу Коши

1) $y''+y=6e^{t}$, $y(0)=3,\ y'(0)=1.$

2) $y''-y'=t^{2}$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$

3) $y''+y'=t^{2}+2t,$ $y(0)=0,\ y'(0)=-2.$

4) $y''-y=\cos 3t,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1.$

5) $y''+y'+y=7e^{2t}$, $y(0)=1,\ y'(0)=4.$

6) $y''+y'-2y=-2(t+1)$, $y(0)=1,\ y'(0)=1.$

7) $y''-9y=\sin t-\cos t,$ $y(0)=-3,\ y'(0)=2.$

8) $y''+2y'=2+e^{t}$, $y(0)=1,\ y'(0)=2.$

9) $2y''-y'=\sin 3t,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1.$

10) $y''+2y'=\sin(t/2)$, $y(0)=-2,\ y'(0)=4.$

11) $y''+y=\operatorname{sh} t,$ $y(0)=2,\ y'(0)=1.$

12) $y''+4y'+29y=e^{-2t}$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$

13) $y''-3y'+2y=e^{t}$, $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

14) $2y''+3y'+y=3e^{t}$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$

15) $y''-2y'-3y=2t,$ $y(0)=1,\ y'(0)=1.$

16) $y''+4y=\sin 2t$, $y(0)=0,\ y'(0)=1.$

17) $2y''+5y'=29\cos t,$ $y(0)=-1,\ y'(0)=0.$

18) $y''+y'+y=t^{2}+t$, $y(0)=1,\ y'(0)=-3.$

19) $y''+4y=8\sin 2t,$ $y(0)=3,\ y'(0)=-1.$

20) $y''-y'-6y=2$, $y(0)=1,\ y'(0)=0.$

21) $y'' + 4y = 4e^{2t} + 4t^2$,
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$

22) $y'' + 4y' + 4y = t^3 e^{2t}$,
$y(0) = 1,\ \ y'(0) = 2.$

23) $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$,
$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 6.$

24) $y'' + 4y = 3\sin t + 10\cos 3t$,
$y(0) = -2,\ \ y'(0) = 3.$

25) $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t$,
$y(0) = 5\ \ y'(0) = 1.$

26) $y'' + 3y' - 10y = 9\cos 3t$,
$y(0) = 3,\ \ y'(0) = -1.$

27) $y'' + y' - 2y = e^{-t}$,
$y(0) = -1,\ \ y'(0) = 0.$

28) $y'' - 2y' = e^t(t^2 + t - 3)$,
$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 2.$

29) $y'' + y = 2\cos t$,
$y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1.$

30) $y'' - y' = 4\sin t + 5\cos 2t$,
$y(0) = -1,\ \ y'(0) = -2.$

Решение типового варианта

Решить задачу Коши

$$y'' + 2y' + y = e^{-t}(\cos t + t);\quad y(0) = y'(0) = 2.$$

○Пусть $L[y(t)] = Y(p)$. Преобразуем поставленную задачу по Лапласу. Учитывая начальные условия, имеем:

$$L[y'(t)] = pY(p) - y(0) = pY(p) - 2;$$

$$L[y''(t)] = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 2p - 2.$$

Для правой части уравнения получаем

$$L[e^{-t}\cos t + e^{-t}t)] = \left|4;\ 9;\ 13\right| = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2}.$$

С учетом приведенных равенств поставленную задачу преобразуем в область изображений

$$p^2Y(p) - 2p - 2 + 2pY(p) - 4 + Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

или

$$(p^2 + 2p + 1)Y(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{1}{(p+1)^2} + 2p + 6.$$

Отсюда изображение решения имеет вид:

$$Y(p)=\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}+\frac{1}{(p+1)^4}+\frac{2}{p+1}+\frac{4}{(p+1)^2}.$$

Разложим первое слагаемое последнего выражения на простейшие дроби. Имеем

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+2p+2)}=\frac{A}{p+1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+2},$$

$$1=A(p^2+2p+2)+(Bp+C)(p+1),$$

$$p=-1:\quad 1=A\cdot 1\Rightarrow A=1,$$

$$-p^2-2p-1=Bp^2+(B+C)p+C\Rightarrow B=-1,\quad C=-1.$$

$$Y(p)=\frac{3}{(p+1)}-\frac{p+1}{(p+1)^2+1}+\frac{1}{(p+1)^4}+\frac{4}{(p+1)^2}.$$

Применяя к этому равенству формулы таблицы оригиналов и их изображений 1, 4, 9, 13, получим оригинал-решение $y(t)$.

$$y(t)=3e^{-t}-e^{-t}\cos t+t^3e^{-t}/6+4te^{-t}=e^{-t}(3-\cos t+t^3/6+4t).\bullet$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1 Краснов М. Л. Функции комплексного переменного. Опера ционное исчисление. Теория устойчивости.Учебное пособие, 2-е изд. / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. − М.: Наука. 1981. −284 с.

2 Лунц Г. Л. Функции комплексногопеременного. / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. − М.: Лань, 2002. − 292 с.

3 Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математики. Учебное пособие / Д. Т. Письменный. − М.: Айрис-пресс. − 2006. − 608 с.

4 Мартыненко В. С. Операционное исчисление. Учебное пособие/ В. С. Мартыненко. − М.: Высш. матем., 1990. − 331 с.

5 Пчелин Б. К. Специальные разделы высшей математики. Учебное пособие / Б. К. Пчелин. − М. Высш. школа, 1973. − 464 с.

6 Чудесенко В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). Учебное пособие / В. Ф. Чудесенко. − М.: Высш. школа, 1983. − 112 с.

7 Соломенцев Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения. Учеб.пособие. / Е. Д. Соломенцев. − М.: Высш. матем., 1988. − 167 с.

Дополнительная

8 Зайцев Є. П. Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу: навчальний посібник. /Є. П. Зайцев. − К.: Алерта, 2013. − 574 с.

9 Зайцев Е. П. Высшая математика: интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных, обыкновенные дифференциальные уравнения, ряды: учебное пособие/ Е. П.Зайцев – Кировоград: Изд-во КЛА НАУ, 2014. – 615 с.

Приложение А. Образец титульной страницы

КИРОВОГРАДСКАЯ ЛЕТНАЯ АКАДЕМИЯ
НАЦИОНАЛЬНОГО АВИАЦИОННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра „Физико-математических дисциплин”

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Вариант № ____

ПО ДИСЦИПЛИНЕ

____

курсанта группы______________________________

специальность________________________________

____

(Фамилия, имя и отчество) *Подпись*

Домашний адрес:______________________________

Работу проверил: _____________________________

(ученая степень, фамилия, инициалы)

Результат проверки:___________________________

(зачтена, не зачтена)

____

(Подпись, дата)

Кировоград, 201__