

УДК 37.012:519

БОНДАР Ольга Петрівна,

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізико-математичних дисциплін, Львівська академія Національного авіаційного університету

КОВАЛЬОВ Юрій Григорович,

кандидат технічних наук, доцент кафедри фізико-математичних дисциплін, Львівська академія Національного авіаційного університету

КОВАЛЬОВА Олена Сергіївна,

помічник начальника академії з громадських зв'язків, Львівська академія Національного авіаційного університету

КРИТЕРІЙ ПІРСОНА І КРАМЕРА-УЕЛЧА В ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

У статті вказано найбільш вживані в навчально-методичних джерелах інформації назви критеріїв перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності і гіпотези про рівність математичних сподівань генеральних сукупностей; описано умови використання цих критеріїв та можливості їх застосування в педагогічних дослідженнях; розглянуто приклад застосування.

***Ключові слова:** критерій Пірсона, критерій Крамера-Уелча, χ^2 -квадрат критерій, нормальний розподіл, нульова гіпотеза, педагогічні дослідження, математична статистика.*

Постановка проблеми. Метою будь-якого педагогічного дослідження є вивчення складових педагогічного процесу, зокрема, обґрунтування гіпотези дослідження або справедливості теоретичних результатів. Для об'єктивності висновків, пов'язаних зі збором і обробкою статистичної інформації, зазвичай користуються статистичними методами.

При цьому у дослідників, в першу чергу, у педагогів-гуманітаріїв, виникає ряд проблем. Вкажемо деякі з них, що стосуються, зокрема, використання критеріїв Пірсона і Крамера-Уелча. Одна з проблем полягає в складності пошуку статистичного критерію в джерелах інформації за однією з його назв, тобто в ідентифікації критерію за різними його назвами. В науковій діяльності різноманітність назв може бути викликана різними варіантами перекладу, поглядами різних авторів відносно історичних пріоритетів, посиланням на різні авторитетні джерела тощо.

Наступна проблема пов'язана з тим, що застосування будь-якого статистичного методу потребує обґрунтування, тобто потребує виконання певних умов, за яких може бути використаний метод. Відсутність в педагогічному дослідженні посилань на ці умови робить отримані завдяки методу висновки неповними або навіть неправильними.

Але чи не найскладнішою для педагога-науковця є проблема розуміння взаємозв'язку статистичних методів з методами педагогічних досліджень. Дослідник повинен розуміти, зокрема, суть статистичних гіпотез, зміст статистичних висновків в педагогічних дослідженнях, як ці висновки інтерпретувати з точки зору педагогічного впливу, а, відтак, застосувати до впровадження нових форм, методів, засобів навчання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Зазначені проблеми спостерігаються при дослідженні навчально-методичних публікацій, зокрема, відносно одного із заголовних критеріїв. Так, в різних джерелах інформації зустрічаються наступні його назви: критерій Крамера-Уелча [8], статистика, яка має розподіл Стюдента [9], функція, розподілена за

законом Стюдента [1], випадкова величина, що має закон розподілу $N(0; 1)$ [5], нормована нормальна випадкова величина [4], статистика функції Лапласа [6]. При цьому для розрахунку критерію можуть використовуватися різні формули без пояснень їх взаємозв'язку.

Назва гіпотези, для перевірки якої використовується критерій, також формулюється неоднозначно: порівняння [4; 9] (перевірка збігу [8], рівності [1; 5]) математичних сподівань [4; 5; 9] (середніх [8], генеральних середніх [4; 5], центрів розподілу [6]) двох нормальних розподілів [9] (генеральних сукупностей [1; 6]). Для математика така різниця не становить проблеми, бо зрозуміти суть формулювання він може швидко з формул або контексту. Але педагогу-гуманітарію потрібно витратити, як правило, багато часу і зусиль на розуміння тотожності назв і формул.

Такого роду проблема виникає і при пошуку умов, за яких використовується критерій. Наприклад, наводяться такі умови використання критерію Крамера-Уелча: виміри в шкалі відношень [8], сукупності мають рівні дисперсії [1], дисперсії відомі [4], незалежні генеральні сукупності [5], незалежні вибірки [4; 6], врахування альтернативних гіпотез [3; 4; 7]. При цьому треба віддати належне, – майже у всіх публікаціях вказується одна з головних умов – сукупності повинні бути розподілені нормально.

Мета статті. З огляду на вказані проблеми нашою метою є спростити педагогам-науковцям пошук і застосування в педагогічній діяльності критеріїв Пірсона і Крамера-Уелча за назвами критеріїв, змістом відповідних гіпотез і умовами їх використання.

Виклад основного матеріалу. Як було зазначено вище, однією з головних умов застосування критерію перевірки середніх значень двох генеральних сукупностей є нормальний розподіл.

Нормальний розподіл – один з найважливіших розподілів ймовірностей. Він зустрічається у багатьох застосуваннях. Розподіл є близьким до нормального, коли розглядувана випадкова величина є сумою великої кількості незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму є малим.

Так, в педагогічних дослідженнях, пов'язаних зі статистикою, розглядаються [2] вибірки $B = \{e_j, v(\{vч\}, \{зч\})\}$ з генеральної сукупності об'єктів дослідження. Це можуть бути безпосередньо групи учасників досліджень: студентів, учнів, педагогів тощо. Якщо за результати їх діяльності взяти випадкову величину – кількісний показник властивості $v(\{vч\}, \{зч\})$: оцінки, час виконання завдань, рейтинг, то цей показник визначатиметься, як правило, багатьма чинниками, більш чи менш незалежними один від одного. До них можуть відноситися внутрішні чинники $\{vч\}$ (риси характеру, набутий досвід, темперамент, тощо) і зовнішні чинники $\{зч\}$ (умови організації і проведення дослідження, мікроклімат в колективі тощо). Якщо ні один з чинників не превалюватиме над іншими, то можна припустити, що розглядувана властивість підпорядковується нормальному закону.

На практиці підставою для припущення про те, що невідомий розподіл досліджуваної випадкової величини є нормальним, слугує виконання правила трьох сигм. Сутність правила: якщо випадкова величина має нормальний розподіл, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення.

Перевірка гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу генеральної сукупності виконується за допомогою спеціально підібраної випадкової величини, яка називається критерієм узгодженості (узгодження, рос. – критерій согласия). З кількох існуючих критеріїв узгодженості розглянемо часто вживаний на практиці «хі квадрат» χ^2 критерій Пірсона. Він є важливим, бо застосовується для перевірки гіпотези не тільки про нормальний, але й про інші розподіли.

Застосування критерію полягає в порівнянні емпіричних (рос. – наблюдаемых) і теоретичних (обчислених за припущення нормального розподілу) частот. Якщо розбіжність між цими частотами випадкова, тобто пояснюється малим числом спостережень або способом їх групування, то критерій засвідчує на прийнятому рівні значущості узгодження

частот. Якщо ж розбіжність не випадкова, тобто гіпотеза про нормальний розподіл є неправильною, то критерій засвідчує неузгодженість частот.

В якості критерію перевірки нульової гіпотези H_0 – генеральна сукупність розподілена нормально – приймається випадкова величина $\chi^2 = \sum(n_i - m_i)^2/m_i$. Якщо вона виявиться меншою за критичне значення правосторонньої критичної області, яке шукається за відповідними таблицями, то підстав заперечити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності не буде. Зауважимо, що в цьому випадку висновок про те, що нормальний розподіл має місце, може бути неправильним.

Приклад. Група 50 студентів отримала за тест оцінки (n_i – кількість студентів, m_i – відповідні теоретичні частоти):

	E	D	C	B	A
n_i	5	10	20	8	7
m_i	6	14	18	7	5

Використовуючи критерій Пірсона, за рівнем значущості 0,05 встановити, чи є випадковою розбіжність між емпіричними і теоретичними частотами, виходячи з гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності оцінок. Порівнюючи обчислене $\chi^2 = 2,475$ з табличним $\chi^2_{кр}(0,05; 2) = 6,0$, робимо висновок про те, що немає підстав заперечити гіпотезу, тобто розбіжність між частотами незначна. Цей висновок є важливим, коли, наприклад, треба дати прогноз оцінок інших студентів генеральної сукупності за умови, що вибірка даних 50 студентів є репрезентативною.

Нехай дві генеральні сукупності X та Y розподілені нормально, причому їх дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$ відомі з попереднього досвіду або знайдені теоретично. За незалежними вибірками з цієї сукупності знайдено середні \bar{x} і \bar{y} . Зазвичай, вони відрізняються. Чи є ця різниця суттєвою, тобто, чи відрізняються середні генеральних сукупностей? Перевірка нульової гіпотези H_0 – генеральні середні однакові – допоможе дати відповідь. Якщо нульова гіпотеза правильна, то різниця вибіркового середнього несуттєва і пояснюється, зокрема, випадковим відбором елементів вибірки або недостатньою їх кількістю. За критерій перевірки нульової гіпотези береться випадкова величина

$$Z = (\bar{x} - \bar{y}) / \sqrt{D(X)/n + D(Y)/m}$$

яку порівнюють з критичним значенням, шуканим за допомогою функції Лапласа. Випадкову величину Z або її аналоги за невідомих рівних дисперсій та різних об'ємах вибірок називають разом з поданими вище назвами критерієм Крамера-Уелча.

В окремому випадку поряд з нульовою гіпотезою $H_0: M(X)=M(Y)$ розглядають конкуруючу гіпотезу $H_1: M(X)>M(Y)$. В педагогічній практиці такий випадок має місце, коли професійні міркування дозволяють припустити, що генеральна середня однієї сукупності більша за генеральну середню іншої. Наприклад, якщо удосконалено методику викладання деякої теми, то природньо припустити, що це приведе до підвищення оцінок студентів з цієї теми. В такому випадку знаходять правосторонню критичну область, виходячи з вимоги, щоб ймовірність попадання критерію в цю область дорівнювала прийнятому рівню значущості: $P(Z > z_{кр}) = \sigma$.

Висновки та перспективи подальших досліджень. В результаті проведеного дослідження нами вказано найбільш вживані в навчально-методичних джерелах інформації назви критеріїв перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності і гіпотези про рівність математичних сподівань генеральних сукупностей; описано умови використання критеріїв та можливості їх застосування в педагогічних дослідженнях.

Перспективою наступних наших досліджень є подальше наближення теорії та методів математичної статистики до потреб педагогічної діяльності з метою впровадження в навчальний процес нових форм, методів і засобів навчання.

Список використаних джерел

1. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. К.: ЦУЛ, 2002. 448 с.
2. Бондар О.П. Математична статистика як елемент педагогічної технології навчання у вищій школі/ О.П. Бондар, М.Ф. Семенюта, Ю.Г. Ковальов та ін.// Науковий вісник Львівської академії. Серія: Педагогічні науки: зб. Наук. Пр. Кропивницький: КЛІА НАУ, 2017. Вип.2. С. 17–22.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. М.: Высш. шк., 1998. 576 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. М.: Высш. шк., 2003. 479 с.
5. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Нав.-метод. посібник: У 2-х ч. К.: КНЕУ, 2001. 336 с.
6. Математическая статистика. Под ред. Длина А.М. М.: Высш. школа, 2005. 298 с.
7. Математическая энциклопедия, т. 1-5. М.: «Советская Энциклопедия», 1985.
8. Новиков Д.А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). М.: МЗ-Пресс, 2004. 67 с.
9. Сеньо П.С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. Київ: Центр навчальної літератури, 2004. 448 с.

References

1. Barkovs'kyu, V.V., Barkovs'ka, N.V., Lopatin, O.K. (2002). Teoriya ymovirnostey ta matematychna statystyka [*Problem training: the main issues of theory*]. K.: TSUL [in Ukrainian].
2. Bondar, O.P., Semenyuta, M.F., Kovalov, Y.H. & ets (2017). Matematychna statystyka yak element pedahohichnoyi tekhnolohiyi navchannya u vyshchiy shkoli [*Mathematical statistics as an element of teaching technology in higher education*]. Scientific herald of the Flight Academy. Series: Pedagogical sciences: Sb. Science Pr - Kropivnitsky: KLA NAU, V.2., 17-22 [in Ukrainian].
3. Ventsel, E.S. (1998). Teoryya veroyatnostey [*Theory of probabilities*]. M.: Vyssh. Shk., [in Russian].
4. Hmurman, V.E. (2003). Teoryya veroyatnostey y matematycheskaya statystyka: Uchebnoe posobyie dlya vuzov [*Theory and Mathematical Statistics: A Manual for High Schools*]. M.: Vyssh. Shk. [in Russian].
5. Zhluktenko, V.I., Nakonechnyy, S.I., Savina, S.S. (2001). Teoriya ymovirnostey i matematychna statystyka [*Probability theory and mathematical statistics*]. Nav-method. manual: In 2 ch. K.: KNEU [in Ukrainian].
6. Matematycheskaya statystyka [*Mathematical statistics*] (2005). Pod red. Dlyna A.M. M.: Vyssh. shkola [in Russian].
7. Matematycheskaya éntsyklopedyya [*Mathematical Encyclopedia*]. (1985). V. 1-5. M.: "Sovetskaya Entsyklopedyya" [in Russian].
8. Novykov, D.A. (2004). Statystycheskye metody v pedahohycheskykh yssledovanyyakh (typovye sluchay) [*Statistical methods in pedagogical research (typical cases)*]. M.: MZ-Press [in Ukrainian].
9. Senyo, P.S. (2004). Teoriya ymovirnostey ta matematychna statystyka [*Probability Theory and Mathematical Statistics*]. Kyiv: Tsentr navchalnoi literatury [in Ukrainian].

BONDAR Olha, Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Physics and Mathematics Subjects, Flight Academy of National Aviation University;

KOVALOV Yuriy, Ph. D. (Engineering), Associate Professor, Department of Physics and Mathematics Subjects, Flight Academy of National Aviation University;

KOVALOVA Olena, Head of PR Department, Flight Academy of National Aviation University.

CRITERIA PEARSON AND CRAMER-WELCH IN PEDAGOGICAL RESEARCHES

Abstract. *The purpose of any pedagogical research is to study the components of the pedagogical process, in particular, the justification of the research hypothesis or the validity of the theoretical results. For the objectivity of the conclusions associated with the collection and processing of statistical information, usually use statistical methods.*

At the same time, researchers, in the first place, from humanitarian educators, have a number of problems. We will list some of them, in particular, the use of the criteria of Pearson and Cramer-Welch. One of the problems is the difficulty of finding a statistical criterion in the sources of information in one of its names, that is, in identifying the criteria for its various names. In scientific work, the variety of names can be caused by different versions of translation, the views of different authors in relation to historical priorities, a reference to various authoritative sources, and so on.

The next problem is that the use of any statistical method requires justification, that is, it requires certain conditions under which the method can be used. The absence of references to these conditions in the pedagogical study makes the conclusions obtained by the method incomplete or even incorrect.

But perhaps the most complicated problem for the educator-scientist is the problem of understanding the relationship between statistical methods and methods of pedagogical research. The researcher must understand, in particular, the essence of statistical hypotheses, the content of statistical conclusions in pedagogical studies, how to interpret these conclusions from the point of view of pedagogical influence, and, therefore, apply to the introduction of new forms, methods, means of study.

The name of the hypothesis, for verification of which the criterion is used, is also formulated ambiguously. For a mathematician, such a difference is not a problem, since it can quickly understand the essence of the wording from a formula or context. But the humanitarian educator needs to spend, as a rule, a lot of time and effort to understand the identity of the names and formulas.

In view of the above problems, our aim is to simplify the search for and application of the Pearson and Cramer-Welch criteria according to the names of the criteria, the content of the hypotheses and the conditions of their use in the pedagogical activity of the teachers.

As a result of our research, we have indicated the most used in educational and methodological sources of information titles of criteria for testing the hypothesis about the normal distribution of the general population and the hypothesis of equality of mathematical expectations of general aggregates; describes the conditions for using the criteria and the possibility of their application in pedagogical research.

The prospect of our further research is the further approximation of the theory and methods of mathematical statistics to the needs of pedagogical activities in order to introduce new forms, methods and means of learning into the learning process.

Key words: *Pearson criterion, Cramer-Welch criterion, Hi-square criterion, normal distribution, zero hypothesis, pedagogical research, mathematical statistics.*

*Одержано редакцією: 12.09.2018 р.
Прийнято до публікації: 18.09.2018 р.*