Розділ 7

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорія ймовірностей, як відомо, вивчає закономірності, притаманні масовим випадковим явищам. Наявність цих закономірностей пов'язана саме із масовістю явищ, тобто з великим числом виконуваних однорідних випробувань, що породжують у своїй сукупності випадкову величину, яка підпорядковується цілком визначеному закону. Слід зазначити, що при вивченні результатів випробувань над реальними масовими випадковими явищами має місце закономірність, яка називається властивістю стійкості. Суть цієї властивості полягає в тому, що конкретні особливості кожного окремого випадкового явища майже не позначаються на середньому результаті маси таких явищ. Саме ця стійкість середніх і становить фізичну сутність *закону великих чисел*, який розуміють у широкому значенні слова так: при дуже великій кількості випадкових явищ середній їхній результат практично перестає бути випадковим і може бути передбачений з великим ступенем визначеності. Він відіграє важливу роль у практичних застосуваннях ТЙ, тому що дозволяє майже з повною визначеністю передбачити результати масових випадкових явищ.

Під законом великих чисел у вузькому значенні розуміють ряд математичних теорем, у кожній з яких для тих або інших умов установлюється факт наближення середніх характеристик великої кількості випробувань до деяких відповідних сталих.

Можливості таких пророкувань у гарунці масових випадкових явищ ще більше розширюються завдяки наявності іншої групи граничних теорем, відомих за назвою *центральної граничної теореми*, що стосуються вже не граничних значень ВВ, а граничних законів розподілу. Відповідно до цієї теореми, досить велика сума порівняно малих ВВ поводиться приблизно як нормальна випадкова величина.

Різні форми закону великих чисел разом з різними формами центральної граничної теореми утворюють сукупність граничних теорем ТЙ. В основі доведення цих теорем лежить важлива нерівність, виведена у 1845 р. П. Л. Чебишевим.

7.1 Закон великих чисел

1. Нерівності Чебишева[1]. Як відомо, за заданим законом розподілу випадкової величини можуть бути визначені її числові характеристики $M(X)$, $D(X)$ й ін. З іншого боку, неодноразово підкреслювалося, що знання числових характеристик якщо не повністю, то в деякому значенні характеризують закон розподілу. Метою розглянутих далі двох нерівностей і є оцінка закону розподілу за заданими числовими характеристиками.

Теорема 7.1. Якщо випадкова величина X набуває тільки невід'ємних значень ($X \geq 0$) і має математичне сподівання $M(X)=m_x$, то $\forall(\varepsilon>0)$ виконується нерівність

$$P(X>\varepsilon)\leq M(X)/\varepsilon. \tag{7.1}$$

□ Нехай X – дискретна ВВ, задана розподілом, зазначеним у табл. 4.1. Виберемо деяке число $\varepsilon>0$ та припустимо, що в даному ряді $x_1 \leq \varepsilon,\ x_2 \leq \varepsilon, \ldots, x_k \leq \varepsilon$ і $x_{k+1}>\varepsilon$, $x_{k+2}>\varepsilon$, …, $x_n>\varepsilon$ (рис. 7.1).

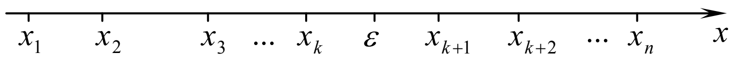

Рис. 7.1

Запишемо вираз для математичного сподівання $M(X)$:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{k} x_i p_i + \sum_{i=k+1}^{n} x_i p_i,$$

де $p_i\ (i=\overline{1,n})$ – імовірність того, що випадкова величина X набуває значення відповідно $x_i\ (i=\overline{1,n})$.

Оскільки за умовою всі $x_i \geq 0$ і $p_i \geq 0$, то, відкинувши першу суму, внаслідок чого $M(X)$ може тільки зменшитися, і замінивши в другій сумі всі x_i на меншу величину ε, одержимо нерівність

$$M(X)\geq \varepsilon \sum_{i=k+1}^{n} p_i \quad \text{або} \quad \sum_{i=k+1}^{n} p_i \leq M(X)/\varepsilon.$$

---

[1] Чебишев Пафнутій Львович (1821 – 1894) – російський математик і механік

Сума ймовірностей у лівій частині отриманої нерівності являє собою суму ймовірностей подій $X=x_{k+1}$, …, $X=x_n$, тобто ймовірність події $X>\varepsilon$.

Тому $P(X>\varepsilon)\le M(X)/\varepsilon$.

Нехай тепер X – НВВ із щільністю ймовірностей $f(x)$. Виконуючи перетворення, аналогічні до попередніх, одержимо послідовно $M(X)=\int\limits_0^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_0^{\varepsilon} xf(x)dx+\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx\ge\varepsilon\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx$,

Звідки $\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx\le M(X)/\varepsilon$. Оскільки $P(X>\varepsilon)=\int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)dx$, то отримаємо нерівність (7.1). ■

Оскільки події $X>\varepsilon$ і $X\le\varepsilon$ протилежні, то замінюючи $P(X>\varepsilon)$ виразом $1-P(X\le\varepsilon)$, згідно з (2.12), одержимо інший вигляд нерівності (7.1):

$$P(X\le\varepsilon)\ge 1-M(X)/\varepsilon. \tag{7.2}$$

Теорема 7.2. Якщо X – довільна випадкова величина, що має математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$, то $\forall(\varepsilon>0)$ виконується нерівність

$$P(|X-M(X)|>\varepsilon)\le D(X)/\varepsilon^2. \tag{7.3}$$

□ Застосуємо нерівність (7.1) до випадкової величини $\overset{0}{X}{}^2=(X-M(X))^2$, узявши за додатне число ε^2. Маємо:

$$P((X-M(X))^2>\varepsilon^2)\le M(X-M(X))^2/\varepsilon^2.$$

Оскільки нерівність $(X-M(X))^2>\varepsilon^2 \Leftrightarrow |X-M(X)|>\varepsilon$, а $M(X-M(X))^2=D(X)$, то з останньої нерівності, одержимо (7.3). ■

Ураховуючи, що події $|X-M(X)|>\varepsilon$ і $|X-M(X)|\le\varepsilon$ протилежні, то нерівність (7.3) можна записати й в іншому вигляді:

$$P(|X-M(X)|\le\varepsilon)\ge 1-D(X)/\varepsilon^2. \tag{7.4}$$

Нерівність Чебишева у вигляді (7.3) установлює верхню границю, а у вигляді (7.4) $-$ нижню границю ймовірності розглянутої події.

Нерівність (7.4) підкреслює доречність вибору дисперсії $D(X)$ як міру розсіювання значень випадкової величини X від математичного сподівання. Дійсно, як випливає із цієї нерівності, чим менша дисперсія $D(X)$, тим при меншому значенні ε можна з тією ж оцінкою ймовірності стверджувати, що значення ВВ X будуть концентруватися ближче до $M(X)$.

Припустивши в нерівності (7.4) $\varepsilon=3\sigma_x=3\sqrt{D(X)}$, одержимо

$$P(|X-M(X)|\leq 3\sigma_x)\geq 1-1/9=8/9\approx 0{,}8889,$$

тобто ймовірність того, що довільна ВВ відхилиться від свого математичного сподівання не більше ніж на потроєне середнє квадратичне відхилення. Насправді для переважної більшості випадкових величин, що зустрічаються на практиці, ця ймовірність значно ближча до одиниці, ніж $8/9$. Зокрема, для нормально розподілених ВВ за законом $N(m;\sigma^2)$, як ми бачили, вона дорівнює 0,9973.

Зазвичай, якщо закон розподілу ВВ невідомий, але зазначені параметри m і σ, то вважають, що діапазон практично можливих значень ВВ є інтервалом $(m-3\sigma;\ m+3\sigma)$ (*правило трьох сигм*).

Приклад 1. При виготовленні партії однакових деталей розміром $l=10$ мм існує допуск $\Delta l=\pm 0{,}1$ мм. Оцінити ймовірність того, що випадково взята деталь – бракована, якщо $\sigma_x^2=0{,}0025$.

○ Нехай X – розміри деталі. За умовою: $M(X)=10$; $\varepsilon=0{,}1$; $D(X)=0{,}0025$. Потрібно оцінити ймовірність $P(|X-10|>0{,}1)$. За нерівністю Чебишева (7.3) $P(|X-10|>0{,}1)\leq 0{,}0025/0{,}01=0{,}25$, тобто шукана ймовірність не перевищує 0,25. ●

Запишемо нерівності Чебишева у вигляді (7.3) і (7.4) для випадкової величини $X=m$, що має біноміальний закон розподілу з математичним сподіванням $M(X)=np$ і дисперсією $D(X)=npq$ (див. п. **5.1**):

$$P(|m-np|>\varepsilon)\leq npq/\varepsilon^2; \qquad (7.5)$$

$$P(|m-np|\leq\varepsilon)\geq 1-npq/\varepsilon^2. \qquad (7.6)$$

Приклад 2. У технологічному процесі в середньому 85 % виробів мають допуск ± 5 %. Яке число виробів з партії 100 000 шт. з імовірністю 0,98 можна планувати з допуском ± 5 % ?

○ Нехай X – випадкова величина, що виражає число виробів, які мають допуск ± 5 %, серед 100 000 виробів. Дана ВВ розподілена за біноміальним законом, для якої $p = 0{,}85$, $q = 0{,}15$.

Знайдемо числові характеристики ВВ X:

$$M(X) = np = 100\,000 \cdot 0{,}85 = 85\,000;$$
$$D(X) = npq = 100\,000 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15 = 12750.$$

Для визначення відхилення виробів даної партії від математичного сподівання застосуємо нерівність Чебишева (7.6):

$$P(|X - 85\,000| \le \varepsilon) \ge 1 - 12750/\varepsilon^2.$$

Число ε повинне бути вибране так, щоб виконувалася умова $1 - 12750/\varepsilon^2 \le 0{,}98$. Розв'язуючи отриману нерівність:

$$12750/\varepsilon^2 \ge 0{,}02; \quad \varepsilon^2 \le 12750/0{,}02 = 637500; \quad \varepsilon \le 798.$$

Таким чином, число виробів даної партії, які мають допуск $\pm 5\,\%$, з імовірністю 0,98 можна планувати таким, що дорівнює $85\,000 \pm 798$. ●

2. Поняття збіжності послідовності випадкових величин за ймовірністю. Нерівність Чебишева виявляється особливо корисною при розгляді послідовності ВВ, дисперсії яких наближаються до нуля. Нехай задана послідовність ВВ $\{X_n\} = X_1,\ X_2, \ldots, X_n, \ldots$ із математичними сподіваннями $M(X_n)$ і дисперсіями $D(X_n)$, причому

$$\lim_{n \to \infty} D(X_n) = 0. \tag{7.7}$$

Застосовуючи до величини X_n нерівність Чебишева (7.3), одержимо:

$$P(|X_n - M(X_n)| > \varepsilon) \le D(X_n)/\varepsilon^2. \tag{7.8}$$

Права частина цієї нерівності, як випливає з (7.7), наближається до нуля при $n \to \infty$, а ліва частина – невід'ємна (як імовірність!). Тому з нерівності (7.8) випливає, що ймовірність $P(|X_n - M(X_n)| > \varepsilon)$ наближається до нуля при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - M(X_n)| > \varepsilon) = 0, \quad \forall(\varepsilon > 0). \tag{7.9}$$

Оскільки події $|X_n - M(X_n)| > \varepsilon$ і $|X_n - M(X_n)| \le \varepsilon$ протилежні, то отримане співвідношення (7.9) еквівалентне наступному:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - M(X_n)| \le \varepsilon) = 1. \tag{7.10}$$

Ця ситуація описується поняттям збіжності за ймовірністю.

Послідовність ВВ $\{X_n\}$ називається *збіжною за ймовірністю* до випадкової величини *X*, якщо $\forall(\varepsilon > 0)$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0 \text{ або } \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \le \varepsilon) = 1. \tag{7.11}$$

Коротко це записується так: $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{p} X$.

Уведене поняття дозволяє коротко сформулювати отриманий вище результат (7.9) у вигляді наступної леми.

Лема. Якщо для послідовності ВВ $\{X_n\}$ виконані рівності $M(X_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} D(X_n) = 0$, то ця послідовність збігається за ймовірністю до $X = 0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$ або $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n| \le \varepsilon) = 1$.

3. Теорема Чебишева (закон великих чисел). Ця теорема встановлює зв'язок між середнім арифметичним спостережуваних значень випадкової величини і її математичним сподіванням.

Теорема 7.3 (Чебишева). Нехай $\{X_n\}$ – послідовність попарно незалежних ВВ, дисперсії яких обмежені в сукупності, тобто $D(X_n) \le C$, $\forall n$, $C = \text{const}$. Тоді $\forall(\varepsilon > 0)$ виконується нерівність

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2} \tag{7.12}$$

або

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| > \varepsilon\right) \le \frac{C}{n\varepsilon^2}. \tag{7.13}$$

Іншими словами, при $n \to \infty$ середня арифметична ВВ $\bar{X} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i / n$ збігається за ймовірністю до середніх арифметичних їхніх математичних сподівань, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|\le\varepsilon\right)=1 \qquad (7.14)$$

або

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i)\right|>\varepsilon\right)=0. \qquad (7.15)$$

□ Відповідно до властивостей **4.17°** і (4.32) математичного сподівання маємо:

$$M(\bar{X})=M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i).$$

Далі в силу попарної незалежності ВВ X_i $(i=\overline{1,n})$, властивостей **4.22°** і (4.47), а також обмеженості за умовою сукупності дисперсій маємо

$$D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)\le\frac{1}{n^2}nC=\frac{C}{n}.$$

Застосовуючи нерівність (7.4) до ВВ $\bar{X}$ і заміняючи в цій нерівності $M(\bar{X})$ і $D(\bar{X})$ наведеними вище виразами, одержимо (7.12). Переходячи до границі при $n\to\infty$ у нерівності (7.12) з урахуванням того, що ймовірність не може бути більша за одиницю, одержимо (7.14). ■

Важливе значення для подальшого аналізу має окремий випадок теореми Чебишева.

Теорема 7.4 (Хінчина[1]). При необмеженому збільшенні числа *n* попарно незалежних ВВ X_i $(i=1, 2, \ldots, n, \ldots)$, що мають рівні математичні сподівання $M(X_i)=m_x$ й рівномірно обмежені дисперсії $D(X_i)\le C$ для $i=1, 2, \ldots, n, \ldots$, їх середнє арифметичне наближається за ймовірністю до числа m_x, тобто

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-m_x\right|\le\varepsilon\right)=1. \qquad (7.16)$$

[1]Хінчин Олександр Якович (1894–1959) – радянський математик.

□ Співвідношення (7.16) випливають безпосередньо з (7.14), якщо в останньому замінити $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)=\frac{1}{n}\cdot nm_x = m_x$. ■

Ця теорія слугує обґрунтуванням *правила середнього арифметичного* в теорії вимірювань: при досить великій кількості n вимірювань $X_1, X_2, ..., X_n$ деякої величини за наближене її значення беруть середнє арифметичне $\overline{X}=\sum_{i=1}^{n} X_i/n$ цих вимірювань.

Приклад 3. До складу надійшла партія з N електролампочок. Оцінити ймовірність того, що відхилення середньої тривалості горіння 100 лампочок з вибраної кількості від середньої тривалості горіння лампочки з усієї партії не перевершить 6 год., якщо СКВ тривалості її горіння не перевищує 8 год.

○ Нехай ВВ X_i – час горіння i-ї лампочки. Тоді, відповідно до умови задачі, СКВ $\sigma_x \geq 8 \quad (i=\overline{1,N})$. Отже, відповідно до нерівності (7.12), при $\varepsilon=6$ і $n=100$ знайдемо

$$P\left(\left|\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} M(X_i)\right| \leq 6\right) \geq 1-\frac{64}{100\cdot 36} \approx 0{,}982.$$

Таким чином, імовірність шуканої події не менша 0,982. ●

Приклад 4. Скільки разів потрібно вимірювати величину з істинним значенням m_x, щоб з імовірністю не менше 0,95 гарантувати відхилення середньої арифметичної цих вимірювань від істинного значення величини m_x не більше, ніж на 2, якщо середнє квадратичне відхилення вимірювань не перевершує 10?

○ Нехай X_i – результат i-го вимірювання величини $(i=\overline{1,n})$, а $M(X_i)=m_x$ – істинне значення при кожному i. Необхідно знайти n, при якому $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m_x\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1-\frac{D(\overline{X})}{n\varepsilon^2}$, де $\varepsilon=2$, $D(\overline{X})=100$.

Звідси

$$1-D(\overline{X})/(n\varepsilon^2)=0{,}95,\ n=\frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2(1-0{,}95)}=\frac{100}{4\cdot 0{,}05}=500.$$

Таким чином, вимірювати потрібно не менше 500 разів. ●

У статистичному визначенні ймовірності події використовувалася властивість стійкості відносної частоти настання цієї події при збільшенні числа випробувань. Теоретичне обґрунтування цієї властивості дає теорема Бернуллі, що є наслідком теореми Чебишева.

Теорема 7.5 (Бернуллі). Відносна частота появи події A при n незалежних випробувань за схемою Бернуллі збігається за ймовірністю при $n\to\infty$ з ймовірністю p появи події в одному випробуванні, тобто

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon\right)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)=1, \qquad (7.17)$$

де k – число появ події A при n випробуваннях.

□ Оскільки у схемі Бернуллі $m_x=M(X)=np$, $\sigma_x^2=D(X)=$ $=npq$, то ймовірність $P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon\right)=P(|k-pn|>\varepsilon n)$.

Застосувавши нерівність Чебишева (7.3) при $X=k$ і замінивши в останній рівності ε на $n\varepsilon$, з останньої рівності одержимо

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon\right)\le\frac{npq}{n^2\varepsilon^2}=\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (7.18)$$

Звідси при $n\to\infty$ й випливає твердження (7.17). ■

Приклад 5. Імовірність виготовлення нестандартної деталі дорівнює 0,04. Яке найменше число деталей варто відібрати, щоб з імовірністю 0,88 можна було стверджувати, що частка нестандартних деталей серед них буде відрізнятися від імовірності виготовлення нестандартної деталі за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02?

○ Нехай k/n – частота (частка) нестандартних деталей. Відповідно до нерівності

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\ge1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}, \qquad (7.19)$$

яке еквівалентне нерівності (7.18), відповідно до умови задачі, одержимо: $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}=0{,}88;\ 1-\frac{0{,}04\cdot0{,}96}{n\cdot0{,}02^2}=0{,}88 \Rightarrow n=\frac{0{,}04\cdot0{,}96}{0{,}02^2\cdot0{,}12}=800.$

Таким чином, серед відібраних 800 деталей частота нестандартної деталі відрізняється від імовірності виготовлення стандартної деталі за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02. ●

Теорема 7.5 стверджує стійкість частоти при постійних умовах випробування. Але при умовах випробування, які змінюються, аналогічна стійкість також існує. Теорема, що встановлює властивість стійкості частот при змінних умовах випробування, яка є узагальненням теореми Бернуллі, називається теоремою Пуассона.

Теорема 7.6 (Пуассона). Якщо виробляються n незалежних випробувань й імовірність появи події A в i-му випробуванні дорівнює p_i $(i=\overline{1,n})$, то при збільшенні n частота k/n події A збігається за ймовірністю до середнього арифметичного ймовірностей p_i, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| \le \varepsilon\right)=1, \tag{7.20}$$

де ε – будь-яке додатне число.

□ Теорема Пуассона безпосередньо виводиться з нерівності Чебишева, якщо як ВВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ розглядати альтернативні випадкові величини, які мають закони розподілу

X_i	0	1
p	q_i	p_i

$(i=\overline{1,n})$.

Оскільки математичні сподівання ВВ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ дорівнюють відповідно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а їхні дисперсії $D(X_i)=p_i-p_i^2=$ $=p_i(1-p_i)=p_iq_i$ $(i=\overline{1,n})$ обмежені одним числом, тобто $p_iq_i=$ $=p_i(1-p_i)=-p_i^2+p_i=-(p_i-0{,}5)^2+0{,}25\le 0{,}25,$ то формула (7.20) безпосередньо виводиться з формули (7.14). ■

Приклад 6. На трьох автоматичних верстатах виготовляють однотипні вироби. Відомо, що продуктивність 1-го верстата в 2 рази вища, ніж 2-го й в 1,5 раза вища, ніж 3-го. Імовірність виготовлення виробу вищої якості для 1-го верстата дорівнює 0,94, 2-го − 0,95 й 3-го − 0,98. За зміну на цих верстатах виготовлено 6500 виробів. Знайти границі, у яких повинна перебувати частота виготовлення виробу вищої якості, якщо це необхідно гарантувати з імовірністю 0,9.

○ Нехай подія A полягає в тому, що виготовлений виріб – вищої якості. Тоді частота появи події A k/n є ВВ.

При доведенні теореми Пуассона за допомогою нерівності Чебишева, одержуємо:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-\frac{\sum_{i=1}^{n}p_iq_i}{n^2\varepsilon^2}. \qquad (7.21)$$

Ураховуючи різну продуктивність верстатів, з умови прикладу складемо рівняння $t+\frac{t}{2}+\frac{2}{3}t=1\Rightarrow t=6/13$, після чого знайдемо кількість працюючих верстатів 1-го типу, тобто їх $6500\cdot 6/13=3000$.

Знайдемо тепер середню ймовірність p настання події A для 6500 виробів, виготовлених на 3-х верстатах за зміну.

$$\overline{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p_i=\frac{1}{6500}(0{,}94\cdot 3000+0{,}95\cdot 1500+0{,}98\cdot 2000)=0{,}954.$$

Користуючись нерівністю (7.21), маємо:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-0{,}954\right|\le\varepsilon\right)\ge 1-(0{,}94\cdot 0{,}06\cdot 3000+0{,}95\cdot 0{,}05\cdot 1500+$$

$$+0{,}98\cdot 0{,}02\cdot 2000)/(6500^2\varepsilon^2)=0{,}9,$$

звідки $279{,}65/(6500^2\varepsilon^2)=0{,}1$, $\varepsilon\approx 0{,}008$.

Таким чином, $|k/n-0{,}954|\le 0{,}008$.

Розкриваючи нерівність, одержуємо $(0{,}954-0{,}008;\,0{,}954+0{,}008)$ або $(0{,}946;\,0{,}962)$. Таким чином, з імовірністю не менше 0,9, можна стверджувати, що частота виготовлення виробів вищої якості знаходиться в інтервалі (0,946; 0,962). ●

7.2 Центральна гранична теорема

До цього часу ми говорили про стійкість сум вигляду

$$\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i/n.$$

Оскільки $\overline{X}$ сама є випадковою величиною, то не слід забувати, що вона має деякий закон розподілу. Виявляється, що при досить загальних умовах закон розподілу $\bar{X}$ близький до нормального закону розподілу, і цей чудовий факт становить зміст іншої групи теорем, поєднуваних загальною назвою «*центральна гранична теорема*». Різні форми центральної граничної теореми різняться між собою умовами, що накладають на суму розглянутих ВВ.

Оскільки величина $\bar{X}$ відрізняється лише постійним множником від суми $X_1+X_2+...+X_n$, то в загальних рисах зміст *центральної граничної теореми* може бути сформульований наступним чином: *розподіл суми великого числа незалежних випадкових величин при досить загальних умовах наближені до нормального розподілу*.

Цим і пояснюється особлива роль нормального закону, оскільки із сумами великої кількості випадкових доданків доводиться мати справу дуже часто як безпосередньо у ТЙ, так й у її численних застосуваннях.

Однією з теорем, яка належить до центральної граничної теореми, найважливіше місце належить теоремі Ляпунова[1] , яку наведемо без доведення. Зазначимо, що для доведення своєї теореми О. М. Ляпунов розробив спеціальний метод, який згодом став корисним й в інших розділах математики (метод так званих *характеристичних функцій*). Розгляд цього методу виходить за рамки нашого курсу.

Теорема 7.7 (Ляпунова). Якщо $X_1,\ X_2,...,X_n,...$ – незалежні випадкові величини, що мають той самий закон розподілу з математичним сподіванням m і дисперсією σ^2, то при необмеженому збільшенні n закон розподілу суми

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{7.22}$$

необмежено наближається до нормального.

За допомогою цієї теореми можна довести формули (3.19) і (3.22).

1. Інтегральна й локальна формули Муавра-Лапласа. Розглянемо ВВ $Z=(k-np)/\sqrt{npq}$, де $X=k$ – число появ події в n не-

---

[1]Ляпунов Олександр Михайлович (1857 – 1918) – російський математик і механік.

залежних випробуваннях, у кожному з яких воно може з'явитися з однією й тією ж ймовірністю *p*, тобто $X=k-$ ВВ, що має біноміальний закон розподілу, для якого математичне сподівання $M(X)=np$ і дисперсія $D(X)=npq$.

Випадкова величина Z, так само й ВВ *X*, дискретна, але при великому числі *n* випробувань її значення розташовані на осі абсцис так тісно, що її можна розглядати як неперервну із щільністю ймовірностей $\varphi(z)$ (5.61).

Використовуючи властивості математичного сподівання й дисперсії, знайдемо числові характеристики ВВ Z:

$$M(Z)=(M(X)-np)/\sqrt{npq}=(np-np)/\sqrt{npq}=0;$$

$$D(Z)=(D(X)-0)/(\sqrt{npq})^2=npq/npq=1.$$

Оскільки випадкова величина *X* являє собою суму незалежних альтернативних випадкових величин

X_i	0	1
p_i	q	p

,

то ВВ Z також є сумою незалежних, однаково розподілених ВВ. Отже, на основі центральної граничної теореми при великому числі n Z має розподіл, наближений до нормального закону з параметрами $m=0$, $\sigma^2=1$. У цьому випадку щільність імовірностей для Z має вигляд (5.61).

Тоді ймовірність потрапляння ВВ Z в інтервал $(a;b)$ або відрізок $[a;b]$, з урахуванням (5.61) наближено знаходиться за формулою (4.21), тобто

$$P(a\le Z\le b)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx. \qquad (7.23)$$

Виконаємо еквівалентні перетворення над подвійною нерівністю

$$a\le\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\le b \Leftrightarrow np+a\sqrt{npq}\le k\le np+b\sqrt{npq}$$

і припустимо

$$k_1 = np + a\sqrt{npq}, \quad k_2 = np + b\sqrt{npq}.$$

Тоді,

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Використовуючи наведені вище результати і враховуючи співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа (3.23), одержимо наближену рівність

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(b) - \Phi(a), \qquad (7.24)$$

яка збігається з інтегральною формулою Муавра-Лапласа (3.22).

Імовірність $P_n(k)$ того, що подія A відбудеться k разів у n незалежних випробуваннях, можна наближено записати у вигляді:

$$P_n(k) \approx P_n(k \le X \le k + \Delta k).$$

Чим менше Δk, тим точніша наближена рівність. Мінімальне (ціле) $\Delta k = 1$.

Тому, ураховуючи (7.24), можна записати:

$$P_n(k) \approx \Phi(b) - \Phi(a), \qquad (7.25)$$

де

$$a = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{(k+1) - np}{\sqrt{npq}}.$$

При малих Δx маємо:

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) \approx \varphi(x)\Delta x, \qquad (7.26)$$

де $\varphi(x)$ – щільність стандартного нормального розподілу (5.61).

Вважаючи

$$x = a, \quad \Delta x = b - a = \frac{(k+1) - np}{\sqrt{npq}} - \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}},$$

з (7.26) з урахуванням (7.25), одержимо локальну формулу Муавра-Лапласа (3.19).

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте закон великих чисел у широкому й вузькому його значенні.

2. Сформулюйте нерівність Чебишева.

3. Доведіть, що $P(|X-M(X)|\le\varepsilon)\ge 1-D(X)/\varepsilon^2$.

4. Дайте поняття збіжності послідовності ВВ за ймовірністю.

5. Сформулюйте теорему Чебишева.

6. Сформулюйте теорему Хінчина і її практичне застосування.

7. Сформулюйте теорему Бернуллі.

8. Сформулюйте теорему Пуассона.

9. Яка роль граничних теорем у теорії ймовірностей?

10. Який із законів розподілу фігурує як граничний?

11. У чому полягає центральна гранична теорема Ляпунова?

12. Доведіть інтегральну теорему Муавра-Лапласа з використанням теореми Ляпунова.

Індивідуальні завдання 7. 1. Дискретна ВВ X задана законом розподілу з відповідного індивідуального завдання 4 розд. 4.

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що

$$|X-M(X)|\le\varepsilon, \text{ де } \varepsilon=1{,}2\sqrt{D(X)}.$$

2. Завод випускає $3{,}2V$ % виробів 1-го сорту й $(100-3{,}2V)$ % виробів 2-го сорту. Яка ймовірність того, що серед S випадковим чином узятих виробів не більше T виявляться 2-го сорту, якщо ймовірність того, що вибраний виріб буде 1-го (2-го) сорту, не залежить від якості інших виробів?

Значення параметрів S і T обчислюються за наступними формулами (V – номер варіанта):

$$S=V\cdot 300+6000; \qquad T=V\cdot 12+250.$$

Розв’язання варіанта ІЗ

1. Дискретна ВВ X задана законом розподілу із прикладу 9 розд. 4. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що

$$|X-M(X)|\le 1{,}2.$$

○ У прикладах 9 і 12 розд. 4 вже обчислені математичне сподівання і дисперсія ВВ X: $M(X)=0{,}15$; $D(X)=0{,}9275$.

Скористаємося нерівністю Чебишева у вигляді (7.4), тобто

$$P(|X-M(X)|\le\varepsilon)\ge 1-D(X)/\varepsilon^2.$$

Підставляючи до цієї нерівності $M(X)$, $D(X)$ і $\varepsilon=1{,}2$, остаточно одержимо:

$$P(|X-0{,}15|\le 1{,}2)\ge 1-0{,}9275/1{,}44\approx 0{,}356. \quad \bullet$$

2. Нехай в умові задачі:

$$3{,}2V\,\%=96\%; \quad (100-3{,}2V)\%=4\%;$$
$$S=10000; \quad T=450.$$

○ Імовірність того, що випадковим чином узятий виріб виявиться 2-го сорту, дорівнює 0,04. У такому випадку

$$np=10000\cdot 0{,}4=400,$$
$$npq=400\cdot 0{,}96=384.$$

За формулою (7.24) при $k_1=0$ і $k_2=450$ одержимо

$$P(0\le k\le 450)\approx\Phi\left(\frac{450-400}{\sqrt{384}}\right)-\Phi\left(\frac{-400}{\sqrt{384}}\right)\approx$$

$$\approx\Phi(2{,}55)+\Phi(20)\overset{Д4}{=}0{,}995,$$

тобто з імовірністю 0,995 можна стверджувати, що серед 10000 виробів не більше 450 виявляться 2-го сорту. ●